ENS

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (durée : 5 heures)

Les candidats sont priés de soigner la rigueur du raisonnement et la rédaction (écriture, présentation, orthographe). Il sont autorisés à traiter les différentes parties, qui ne sont pas indépendantes, dans l'ordre qu'ils préfèrent ; à cette fin, l'en-tête de chaque partie décrit les résultats qui y sont démontrés.

0.1.- On désigne respectivement par $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres entiers naturels, des nombres entiers relatifs, des nombres réels, des nombres complexes.

0.2.- Pour toute fonction complexe f définie et continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π, on pose $\|f\|_\infty = \max\{ |f(x)| ; x\in[-\pi,+\pi]\}$.

0.3.- Nous dirons qu'une série à termes complexes $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n$ indexée par $\mathbb{Z}$ est *absolument convergente* si les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$ sont toutes deux absolument convergentes. On définit alors sa somme $S=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n$ par $S=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$. On notera ℓ^1 l'espace vectoriel des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ à termes complexes telles que la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n$ soit absolument convergente. On précise que ℓ^1 est un espace normé complet pour la norme $\|.\|_1$ définie par : $\|(u_n)\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u_n|$.

0.4.- Pour toute fonction continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, périodique de période 2π, et pour tout $n\in\mathbb{Z}$, on définit le n-ième coefficient de Fourier par :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

On note **A** l'espace vectoriel des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continues et périodiques de période 2π, dont la série des coefficients de Fourier $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)$ est absolument convergente. Pour toute $f\in\mathbf{A}$, on pose:

$$\|f\|_{\mathbf{A}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|.$$

0.5.- Soit $\mathbf{L}^1$ l'espace vectoriel des fonctions continues f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$ soit convergente. Pour toute $f\in\mathbf{L}^1$, on définit une fonction $\hat{f}$ de $\mathbb{R}$

dans $\mathbb{C}$, appelée *transformée de Fourier* de f, par :

$$(\forall t \in \mathbb{R})\ \hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-itx}dx.$$

Pour tous f, $g \in L^1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on note : $(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy$. On *admettra* que l'on définit ainsi une fonction de L^1 dont la transformée de Fourier $\widehat{(f*g)}$ est telle que :

$(\forall t \in \mathbb{R})\ \widehat{(f*g)}(t) = \hat{f}(t)\,\hat{g}(t)$.

Partie I

Dans cette partie, on montre que **A** *est une algèbre normée complète formée de fonctions continues périodiques qui sont somme de leur série de Fourier.*

1. a. Soit $f \in \mathbf{A}$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}$.

b. Montrer que l'application qui à $f \in \mathbf{A}$ associe la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ de ses coefficients de Fourier est une bijection linéaire de **A** sur ℓ^1.

c. En déduire que l'application $f \to \|f\|_A$ est une norme sur **A**, qui vérifie en outre :

$$(\forall f \in \mathbf{A})\quad \|f\|_\infty \le \|f\|_A .$$

2. Soient f, g deux éléments de **A**.

a. Montrer que l'on a : $(\forall n \in \mathbb{Z})\ c_n(fg) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p(f)c_{n-p}(g)$.

(On pourra calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p(f)e^{ipt}g(t)e^{-int}dt$.)

b. Etablir que fg appartient à **A** et que $\|fg\|_A \le \|f\|_A \|g\|_A$.

(On pourra commencer par montrer que :

$$(\forall N \in \mathbb{N}^*)\quad \sum_{n=-N}^{N} |c_n(fg)| \le \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |c_p(f)| . \sum_{n=-N}^{N} |c_{n-p}(g)|.)$$

3. Soit $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de **A** telle que la série $\sum_{p=0}^{+\infty} \|f_p\|_A$ soit convergente.

a. Montrer que la série de fonctions $\sum_{p=0}^{+\infty} f_p$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. On note f sa somme.

b. Montrer que l'on a : $(\forall n \in \mathbb{Z})\ c_n(f) = \sum_{p=0}^{+\infty} c_n(f_p)$.

c. Déduire de ce qui précède que f appartient à **A**, et que l'on a : $\|f\|_A \leq \sum_{p=0}^{+\infty} \|f_p\|_A$.

(On pourra commencer par montrer que : $(\forall N \in \mathbb{N}^*) \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)| \leq \sum_{p=0}^{+\infty} \|f_p\|_A$.)

Partie II

Dans cette partie, on montre que **A** *est une algèbre locale : une fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *et de période* 2π *appartient à* **A** *si elle coïncide, au voisinage de tout point, avec une fonction de* **A**. *On montre également que, si* $f \in$ **A** *ne s'annule en aucun point de* $\mathbb{R}$, *alors* $\frac{1}{f}$ *appartient à* **A**.

Soient a, b, c, d quatre réels tels que $a<b<c<d$ et $d-a \leq 2\pi$. On considère la fonction $\varphi=\varphi_{(a,b,c,d)}$ définie et continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π, affine sur [a,b] et [c,d], telle que :

$$(\forall x \in [b,c])\ \varphi(x)=1\ ;\ (\forall x \in [d,a+2\pi])\ \varphi(x)=0.$$

1. Montrer que la série de Fourier de φ converge absolument.

2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π. On suppose que, pour tout $x \in [0,2\pi]$, il existe un voisinage ouvert U_x de x et une fonction f_x appartenant à **A** tels que f_x coïncide avec f sur U_x.

a. Montrer qu'il existe un entier $p \geq 3$, des réels $u_1,...,u_p$, $v_1,...,v_p$ et des fonctions $f_1,...,f_p$ appartenant à **A** tels que:

$$u_1<v_p-2\pi<u_2<v_1\ ;$$

$$(\forall i \in \{2,...,\ p-1\})\quad u_i<v_{i-1}<u_{i+1}<v_i\ ;$$

$$u_p<v_{p-1}<u_1+2\pi<v_p\ ;$$

$$(\forall i \in \{1,...,\ p\})\quad f_i \text{ coïncide avec f sur }]u_i,v_i[.$$

b. Pour $i \in \{2,...,\ p-1\}$, on désigne par φ_i la fonction $\varphi_{(u_i,v_{i-1},u_{i+1},v_i)}$. Définir de même φ_1 et φ_p de façon que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x)=\sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x)f_i(x)$.

c. En déduire que f appartient à **A**.

3. On désigne par **B** l'ensemble des fonctions $f \in$ **A** telles que :

$$|c_0(f)| > \sum_{n=1}^{+\infty} (|c_n(f)|+|c_{-n}(f)|).$$

a. Soit $f \in \mathbf{B}$. Montrer que f ne s'annule en aucun point de $\mathbb{R}$ et que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \frac{1}{f(x)} = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{(f(x)-c_0(f))^p}{(c_0(f))^{p+1}}.$$

En déduire que $\frac{1}{f}$ appartient à **A**.

b. On *admet* que, si $f \in \mathbf{A}$ et $x \in \mathbb{R}$ sont tels que $f(x) \neq 0$, alors il existe une fonction f_x appartenant à **B** qui coïncide avec f sur un voisinage V_x de x. Montrer que, si $f \in \mathbf{A}$ ne s'annule en aucun point de $\mathbb{R}$, alors $\frac{1}{f}$ appartient à **A**.

Partie III

Dans cette partie, on montre que toute fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π, appartient à **A**. *Puis on considère la périodisée f_1 d'une fonction f définie et continue sur $[-\pi,\pi]$, à valeurs complexes et nulle en dehors de $[-\pi+\varepsilon,\pi-\varepsilon]$ pour un $\varepsilon \in]0,\pi[$. On montre que f_1 appartient à* **A** *si et seulement si la transformée de Fourier du prolongement f_2 de f par 0 appartient à* $\mathbf{L}^1$.

Dans cette partie, f désigne une fonction définie et continue sur $[-\pi,\pi]$, à valeurs complexes, nulle en dehors de $[-\pi+\varepsilon,\pi-\varepsilon]$ pour un $\varepsilon \in]0,\pi[$. On définit :

- d'une part la *périodisée* de f comme étant la fonction f_1 de période 2π coïncidant avec f sur $[-\pi,\pi]$, et la suite $(c_n(f_1))_{n \in \mathbb{Z}}$ de ses coefficients de Fourier ;
- d'autre part le *prolongement par zéro* de f comme étant la fonction f_2 coïncidant avec f sur $[-\pi,\pi]$, nulle sur $]-\infty,-\pi]$ et sur $[\pi,+\infty[$, et sa transformée de Fourier $\hat{f}_2$.

Enfin, dans cette partie, on désigne par ϕ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π, et par ψ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, identiquement nulle en dehors de l'intervalle $]-\pi+\frac{\varepsilon}{2}, \pi-\frac{\varepsilon}{2}[$, et égale à 1 sur $[-\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon]$.

1. a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z}^*$: $c_n(\phi') = in c_n(\phi)$.

b. Montrer que $$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |c_n(\phi)| \leq \sqrt{\frac{\pi}{6} \int_{-\pi}^{\pi} |\phi'(t)|^2 dt}.$$

En déduire que ϕ appartient à **A**, et que l'on a :

$$\|\phi\|_{\mathbf{A}} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\phi(t)| dt + \sqrt{\frac{\pi}{6} \int_{-\pi}^{\pi} |\phi'(t)|^2 dt}.$$

2. Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, on note ψ_α la fonction 2π périodique sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t\in[-\pi,\pi],\ \psi_\alpha(t)=e^{i\alpha t}\psi(t).$$

Montrer que ψ_α appartient à **A** pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, et qu'il existe une constante $K>0$ ne dépendant que de ψ telle que : $\forall\alpha\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}],\ \|\psi_\alpha\|_A\le K$.

3. Dans cette question, on suppose que f_1 appartient à **A**.

a. Montrez que $\forall\alpha\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$: $f_1\psi_\alpha\in\mathbf{A}$, et qu'il existe $K>0$ tel que $\forall\alpha\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$: $\|f_1\psi_\alpha\|_A\le K\|f_1\|_A$.

b. En déduire que pour tout $\alpha\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ et tout $N\in\mathbb{N}^*$ on a :

$$\sum_{n=-N}^{n=N}|\hat{f}_2(n-\alpha)|\le 2\pi K\|f_1\|_A.$$

c. En intégrant l'inégalité précédente sur $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, en déduire que $\hat{f}_2$ appartient à $\mathbf{L}^1$.

4. Dans cette question, on suppose que $\hat{f}_2$ appartient à $\mathbf{L}^1$.

a. Etablir la convergence de la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|\int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\hat{f}_2(u)du\right|$.

b. Etablir que l'on a : $(\forall n\in\mathbb{Z})\ \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\hat{f}_2(u)du=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\frac{2\sin(\frac{x}{2})}{x}\,e^{-inx}dx$.

c. On définit une fonction h de période 2π sur $\mathbb{R}$ par : $h(0)=1$; $\forall x\in[-\pi,0[\cup]0,\pi]$: $h(x)=\dfrac{2\sin\frac{x}{2}}{x}$.

Déduire de a et b que la série de Fourier de f_1h est absolument convergente.

d. Montrer que $\frac{\psi}{h}$ appartient à **A**, et en déduire que f_1 appartient à **A**.

Partie IV

Dans cette partie, on montre que le sous-espace vectoriel **F** *des éléments de* $\mathbf{L}^1$ *dont la transformée de Fourier appartient à* $\mathbf{L}^1$ *est un anneau. On résoud ensuite un problème de division dans* **F** *en établissant que l'idéal principal de* **F** *engendré par une fonction* g *de* **F** *qui ne s'annule en aucun point de* $\mathbb{R}$ *contient toutes les fonctions de* **F** *nulles en-dehors d'un segment de* $\mathbb{R}$.

On considère le sous-espace vectoriel **F** des éléments f de $\mathbf{L}^1$ dont la transformée de Fourier $\hat{f}$ appartient à $\mathbf{L}^1$.

On *admettra* que l'on a, pour toute $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(1)\quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{itx} dt.$$

1. Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, nulle hors d'un segment fermé borné [a,b].

a. Montrer que la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que la transformée de Fourier $(\hat{f''})$ de f'' vérifie : $\forall t \in \mathbb{R}$: $(\hat{f''})(t) = -t^2 \hat{f}(t)$.
En déduire que f appartient à **F**.

2. Soient f, h deux éléments de **F**. A l'aide de **0.5** et de la formule (1) ci-dessus, établir que la transformée de Fourier $(\hat{fh})$ du produit fh est donnée par :

$$(\hat{fh}) = \hat{f} * \hat{h} .$$

En déduire que le produit fh appartient à **F**.

Dans tout ce qui suit, on désigne par g une fonction de L^1 qui ne s'annule en aucun point de $\mathbb{R}$ et dont la transformée de Fourier $\hat{g}$ appartient à L^1.

3. **a.** Soient a et b deux réels tels que a<b. Prouver qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 5 tel que P(a)=0, P'(a)=0, P''(a)=0, P(b)=1, P'(b)=0, P''(b)=0. En déduire l'existence d'une fonction h de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, telle que $h(x)=0$ pour $x \leq a$ et $h(x)=1$ pour $x \geq b$.

b. Soit ε un réel tel que $0<\varepsilon<\pi$. Déduire de la question 3. a l'existence d'une fonction ψ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, identiquement nulle en dehors de l'intervalle $]-\pi+\frac{\varepsilon}{2}, \pi-\frac{\varepsilon}{2}[$, et égale à 1 sur $[-\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon]$.

4. **a.** Soient ε un réel tel que $0<\varepsilon<\pi$, et ψ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, identiquement nulle en dehors de l'intervalle $]-\pi+\frac{\varepsilon}{2}, \pi-\frac{\varepsilon}{2}[$, et égale à 1 sur $[-\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon]$. Montrer que la transformée de Fourier de ψg appartient à L^1.

b. Soit f une fonction définie et continue sur $[-\pi,\pi]$, à valeurs complexes, nulle en-dehors de l'intervalle $[-\pi+\varepsilon,\pi-\varepsilon]$ pour un $\varepsilon \in]0,\pi[$. Montrer que la périodisée de $\frac{f}{g}$ appartient à **A** (On pourra considérer la fonction égale à $\frac{f}{\psi g}$ sur $[-\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon]$, nulle ailleurs, et s'inspirer de la démonstration du **3.b.** de la seconde partie.)

c. En déduire que f appartient à l'idéal principal de **F** engendré par g.

5. Montrer, à l'aide de la question **4**, que l'idéal principal de **F** engendré par g contient toutes les fonctions de **F** nulles en-dehors d'un segment quelconque de $\mathbb{R}$.